3. Comment fonctionne un neurone ?

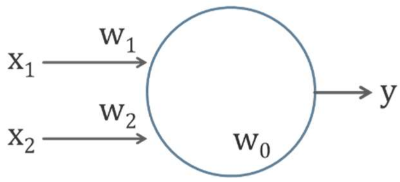
Étude pratique du fonctionnement d'un neurone formel.

#A3D - Travaux dirigés. Prérequis : fonctions et équations.

Apprendre

Neurone formel

Le neurone formel, modèle mathématique du neurone biologique, a été proposé en 1943 par les neurobiologistes W. McCulloch et W. Pitts. Son fonctionnement est simple : à partir de deux entrées x_1 et x_2 (variables) et de trois poids (coefficients) w_0, w_1 et w_2, il calcule une sortie y d'après la relation suivante :



$$y = w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2$$

Bien évidemment, un neurone peut avoir un plus grand nombre d'entrées. En associant différents neurones en série ou en parallèle, on constitue un réseau de neurones.

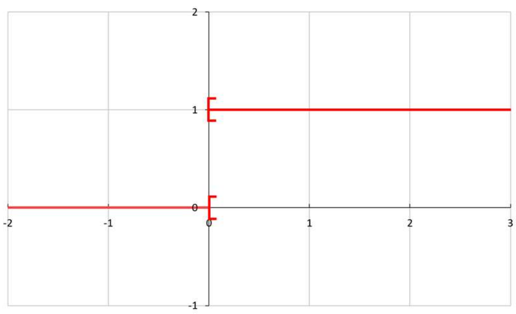
☞ *Les coefficients (w_0, w_1 et w_2) sont également appelés paramètres ; ce sont de ces paramètres dont il est question lorsqu'on caractérise la taille d'une IA : « ChatGPT 3 possède 175 milliards de paramètres ».*

Sous cette forme, un neurone ne peut qu'effectuer des opérations affines (c'est-à-dire de la forme $y = ax + b$). Un réseau de neurone ne pourra donc pas représenter des phénomènes non-linéaires* (comme une croissance exponentielle pour simuler l'évolution d'une population de lapins). Pour casser cette linéarité* et permettre au réseau d'approximer un grand nombre de fonctions, il faut rajouter un dernier ingrédient dans le modèle du neurone, que l'on appelle une *fonction d'activation* et que l'on notera f. Dans ce cas, la relation devient :

$$y = f(w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)$$

Exemple de fonction d'activation

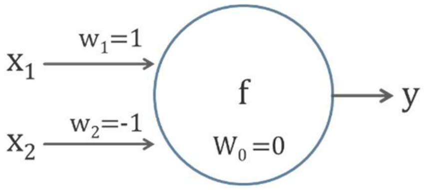
La fonction représentée ci-contre est appelée fonction de Heaviside. Elle est très utile en automatisme et en physique pour modéliser des systèmes qui changent d'état, comme l'allumage d'un circuit, l'ajout d'une force à partir d'un certain temps …



** Le terme « non-linéaire » est employé pour désigner un comportement qui ne s'écrit pas sous la forme $y = ax + b$, car le qualificatif « non-affine » n'existe pas. Il est fréquent de parler de systèmes « linéaires » pour désigner des systèmes dont la transformation est affine.*

Appliquer

Considérons le neurone ci-contre, dont les poids w_0, w_1 et w_2 sont respectivement fixés à 0, 1 et -1 et dont la fonction d'activation f est la fonction définie ci-dessous (fonction de Heaviside) :



$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ 1 \; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

Essayez d'expliquer (sans le démontrer) le traitement effectué par ce neurone ; c'est-à-dire, d'expliquer comment évolue y selon les variables d'entrées x_1 et x_2.

☞ *Avant d'aborder un problème de ce type (qui pourrait par exemple se résoudre de manière calculatoire en analysant les équations), il est toujours intéressant d'observer le comportement sur quelques valeurs afin d'avoir une intuition du résultat attendu.*

☞ Calculez la valeur de y pour les valeurs de x_1 et x_2 suivantes. Pour faciliter les calculs, posons $S = w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2$. Il suffira alors de calculer $f(S)$ pour trouver y.

x_1	x_2	$S = w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2$	$y = f(S)$
1	1	$0 + 1 * 1 \; + 1 * (-1) \; = \; 0$	1
1	0		
0	1		
10	3		

☞ Quel semble être le rôle de ce neurone ?

Appliquer ★

Toujours en utilisant la fonction d'activation de Heaviside, définissez un jeu de poids (w_0, w_1 et w_2) permettant de modéliser avec un seul neurone le comportement d'une porte logique OU. Le comportement d'une porte OU (table de vérité) est rappelé ci-dessous. Nous considérerons que x_1 et x_2 ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vous pouvez suivre les étapes proposées ci-après ou essayer en autonomie.

Proposition de méthode de résolution :

1. Analyser la question : que dois-je faire ; à quoi doit ressembler ma réponse ?

☞ On me demande de donner des poids, donc des valeurs numériques pour w_0, w_1 et w_2.

☞ Je sais que les poids d'un neurone modifient son comportement. On me demande que le comportement du neurone soit celui d'une porte logique OU.

2. Quelles sont les informations utiles à ma disposition ?

☞ Je sais qu'un neurone fonctionne de la manière suivante :

(1) $y = f(w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2)$

Avec f une fonction (appelée activation) qui dans cet exercice est définie par :

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ 1 \; si \; x \geq 0 \end{cases}$

3. Comprendre.

☞ La fonction de Heaviside f permet d'effectuer une comparaison. Je dois donc choisir judicieusement les poids pour que cette comparaison aboutisse au même comportement qu'une porte OU.

☞ Je vais donc expliciter le résultat y du neurone en fonction des variables du problème. Cela me permettra de tester des valeurs pour les poids et de trouver une réponse possible.

4. Résoudre.

☞ En combinant les équations (1) et (2), je peux écrire que :

$$y = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 < 0 \\ 1 \;\; si \;\; w_0 + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 \geq 0 \end{cases}$$

☞ Comme je sais (d'après l'énoncé) que y vaut 1 quand $x_1 = x_2 = 1$, je peux écrire :

Supposons que $y = 1$ et que $x_1 = x_2 = 1$.

Alors : $w_0 + 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \geq 0$. Donc $\boxed{w_0 + w_1 + w_2 \geq 0}$.

☞ Je viens de trouver une condition obligatoire sur les poids, j'encadre donc cette relation. Cette condition est-elle suffisante pour résoudre l'exercice ?

Ecrivez les autres équations, en employant la même méthodologie, en considérant les cas suivants :

y vaut 1 quand $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$

y vaut 1 quand $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

y vaut 0 quand $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ (attention au signe de l'inégalité)

Résolvez le système d'inéquations ainsi obtenues en partant de la plus simple. Il existe une infinité de solutions à ce système. Trouvez en une seule en fixant arbitrairement w_0 en respectant sa condition.

5. Avant de conclure et de proposer une solution définitive, je dois toujours penser à vérifier si ma solution répond vraiment au problème.

Admettons que j'ai trouvé les valeurs : $w_0 = -2$; $w_1 = 2$ et $w_2 = 2$. Je peux alors vérifier que j'obtiens bien le résultat attendu en calculant les valeurs de y pour différents x_1 et x_2 avec mes valeurs pour les poids.

Synthétiser

- Un neurone formel est un modèle mathématique inspiré du fonctionnement d'un neurone biologique.
- Il dispose de paramètres appelés des poids, de variables d'entrées, d'une variable de sortie et d'une fonction d'activation. C'est donc simplement une fonction mathématique.
- Selon ses paramètres, un neurone peut représenter différents comportements, comme comparer des valeurs.
- Un assemblage de neurones formels constitue un réseau de neurones, base de l'apprentissage automatique (machine learning).
- La représentation visuelle habituelle et proposée ici permet de mieux comprendre les liens entre les variables, particulièrement lorsque l'on assemble plusieurs neurones.

Comprendre

Dans l'usage, l'entraînement du réseau, c'est-à-dire la définition des paramètres de l'ensemble des neurones, ne se fait pas à la main, mais est automatisé. C'est pour cette raison que l'on parle d'apprentissage automatique.

Des valeurs initiales sont données à chaque poids, et des algorithmes spécifiques vont alors prendre le relai. Ce processus est itératif, semblable à un processus d'évolution naturelle ; des petites modifications sont apportées, le résultat est analysé, et les modifications sont conservées si elles ont un impact positif sur sa précision.

Ce processus itératif demande énormément de ressources de calcul. Pour rappel, dans le cas de ChatGPT-3, pas moins de 175 milliards de paramètres ont dû être correctement définis pour que le réseau produise un résultat convenable.